EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN
WISKUNDELERAREN, VAN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

44e JAARGANG 1968/1969

VII — 1 APRIL 1969

INHOUD

WOLTERS-NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

REDACTIE.

G. KROOSHOF, Dierenriemstraat 12, Gron., tel. 05900/32494; voorzitter;
Drs. A. M. KOLDIJK, Joh. de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980/3516, secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751/3367;
F. GOFFREE Ajaxstraat 6, Hengelo (G), tel. 05400/18583
Dr. P. M. VAN HIELE, Dr. Beguinlaan 64, Voorburg, tel. 070/860555;
Ch. KRIJNEN, Baroniestraat 6, Oosterhout tel. 01620/4009
Drs. J. VAN LINT, Parkstraat 22, Zwolle, tel. 05200/12129
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/13532;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Julianaweg 25, Oosterbeek, tel. 08307/3807;

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;
Prof. dr. L. N. H. BUNT, U.S.A.
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.
Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
E. H. SCHMIDT, Amstelveen;
Prof. dr. G. R. VELDKAMP, Eindhoven;
Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam;
P. WIJDENES, Amsterdam.

De leden van *de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Opgaven voor deelname aan de Leesportefeuille met buitenlandse tijdschriften aan G. A. J. Boost, Parklaan 107 A, Roosendaal (NB).

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan G. Krooshof te Groningen.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

EEN PRAKTIKUM WISKUNDE

1. *Inleiding*

Onder auspiciën van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) houdt gedurende de laatste vier jaar een groot aantal leraren-vwo zich bezig met heroriënteringscursussen moderne wiskunde voor hun collega's bij het mavo. Sinds augustus 1968 wordt in alle brugklassen van het avo onderwijs in de moderne wiskunde gegeven. Om de mavo-leraren hierin enige steun te bieden is de Centrale Commissie Begeleiding mavo-wiskunde (CCBMW) in het leven geroepen, bestaande uit vertegenwoordigers van de CMLW, de gezamenlijke Pedagogische centra en het „Muloverband". Ongeveer 95 werkgroepen komen dit cursusjaar onder leiding van een leraar-vwo driemaal bijeen om zowel problemen van wiskundige als van didactische en methodische aard te bespreken.

Het programma voor de brugklas wiskunde blijkt in vele gevallen mogelijkheden te bieden voor moderne didactische werkvormen. Een van deze vormen is het werken in groepen, waarbij de leerlingen de gelegenheid krijgen om in grote mate zelf actief bezig te zijn. Door het geven van goede opdrachten en aantrekkelijk materiaal bestaat de mogelijkheid dat de leerlingen zelf aan het experimenteren gaan, hierdoor tot eigen ontdekkingen komen en de noodzaak van symbolisering en abstractie „aan den lijve" ervaren.

Zowel mavo-docent als gespreksleider kennen deze werkvorm veelal slechts van „horen zeggen". Om de gespreksleiders de gelegenheid te bieden ervaring op te doen met deze werkvorm en zich er zo een beter oordeel over te kunnen vormen, heeft de CCBMW daartoe op zaterdag 4 januari 1969 een bijeenkomst belegd.

Tijdens deze bijeenkomst werd de gespreksleiders een door de heren F. Goffree en E. J. Wijdeveld samengesteld praktikum „Randornamenten" voorgelegd. De heer H. J. Jacobs verzorgde daarbij de inleiding en nadien de samenvatting der discussies.

De agenda van deze dag zag er als volgt uit:

10.00–10.15 uur	1. Opening
10.15–10.45 uur	2. Inleiding
10.45–12.15 uur	3. Praktikum
12.15–13.00 uur	4. Discussie
13.00–14.00 uur	5. Lunch
14.00–15.30 uur	6. Produktie van een schema voor een praktikum
15.30–16.00 uur	7. Samenvatting discussies
16.00–16.30 uur	8. Rondvraag
16.30 uur	9. Sluiting

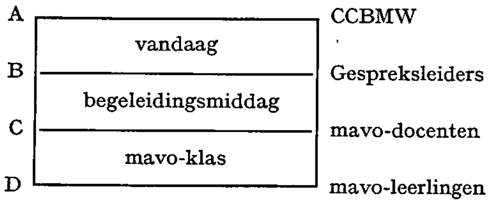
2. „*Wat doen we vandaag.*"

De basis voor deze samenkomst is reeds gelegd tijdens de vorige. Daar adviseerden we u om de mavo-docenten in uw werkgroepen te stimuleren het gebruikelijke lespatroon te doorbreken en leersituaties te creëren, waarin de leerling tot grotere activiteit geprikkeld wordt. Onderwerpen als zelfwerkzaamheid, teamwork, discussie e.d. kunnen aan de orde worden gesteld.

Naar aanleiding hiervan werd door een uwer de vraag gesteld of de commissie genegen was een wiskunde-praktikum te ontwerpen, waarin de mavo-leraren deze nieuwe werkvorm zouden kunnen beleven.

Welnu, het antwoord wordt u vandaag gegeven.

In zekere zin hebben wij te maken met drie niveau's:



de leerlingen (D), de mavo-docenten (C) en de gespreksleiders (B).

In een lezingvorm (one-way communicatie) heb ik u proberen te *zeggen,* dat u de mavo-leraren moet *zeggen,* dat deze zijn leerlingen niet dient te *zeggen,* hoe iets te doen, maar dat die leerlingen het juist *zelf moeten doen.*

De gedachte, om bij de begeleiding (BC) een werkvorm te kiezen, die de mavo-docent zelf met zijn leerlingen kan hanteren (CD), willen we vandaag doortrekken. De CCBMW wil u (AB) vandaag een „stuk" wiskunde voorzetten in een didactische vorm, die u met uw mavo-docenten (BC) kunt gebruiken en die de mavo-leraar op zijn beurt weer kan gebruiken in de klas (CD).

Alvorens te beginnen enige opmerkingen:

- het gaat vandaag slechts om één didactische werkvorm.

We kennen de klassikale les, waarin de leraar zich richt tot de groep. We kennen daarnaast de vraag-antwoord-les, waarin de leraar geregeld in dialoog staat met zijn leerlingen (één tegelijk!).

Ook is ons bekend het klassegesprek, waarin de docent één van het geheel is.

Daarnaast hebben we nog de individuele instructie, waarvan de geprogrammeerde instructie een bijzondere uitwerking is.

- het gaat er niet om díe vorm te kiezen, die de beste is, maar het is juist de diversiteit van leervormen, die de motivatie van de leerlingen verhoogt.
- het gaat er vandaag ook niet om wélke stof we behandelen, maar het is de *werkvorm* als zodanig, die belangrijk is. Het onderwerp, dat we hebben gekozen is naar we hopen van voldoende gewicht om u deze werkvorm werkelijk te laten beleven.

We zien de gang van zaken als volgt:

Vandaag:	onderwerp *Transformaties*	onderwerp *Roostermeetkunde*	Gespreksleiders
	voor gespreksleiders	door gespreksleiders	
		voor mavo-docent	

Begeleidings- middag:	onderwerp *Roostermeetkunde*	onderwerp *Open beweringen*	mavo-docenten
	voor mavo-docent	door mavo-docent	
		voor mavo-leerling	

Schooldag	praktikum: *Open beweringen* voor de leerlingen	mavo-leerlingen

De discussie aan het einde van de ochtend zal niet gaan over de inhoud van het u voorgeschotelde maar over de werkvorm als zodanig. Er zal een aantal vragen in bespreking worden gebracht en wel deze:

1. Welke ervaringen hebt u opgedaan?
2. Welke gevoelens hebben zich hierbij geopenbaard? (b.v. in relatie tot de moeilijkheden in de stof, in relatie tot uw mede-teamgenoten, in relatie tot de leiders van het praktikum)
3. Welke voor- en nadelen ziet u van een dergelijke werkvorm?
4. Acht u deze vorm bruikbaar voor
   a. uw begeleidingsmiddagen,
   b. de leerlingen van de mavo-docenten?

5. Zijn sommige onderwerpen uit het brugklasprogramma misschien zeer goed geschikt of juist ongeschikt voor deze werkvormen? Noemt u enige onderwerpen.

3. *Het praktikum*

Bij gesprekken over de lespraktijk zijn de meeste leraren dankbaar voor tips betreffende de leerstof.

Leuke voorbeelden en proefwerkopgaven worden altijd dankbaar overgenomen. Het is voor ons de vraag of een dergelijke uitwisseling van ervaringen ook met betrekking tot de didactische werkvorm mogelijk is.

Welnu, het praktikum ligt voor u. Elke werkgroep heeft één exemplaar; hierdoor wordt samenwerking van de leden in één groep noodzakelijk! Indien de opdrachten goed gekozen en juist geformuleerd zijn, behoeven we hieraan niets toe te voegen.

OPDRACHT 1. | Materiaal: Kaart A |

We veronderstellen de congruenties (congruente afbeeldingen) in een tweedimensionale ruimte bekend:

T : translaties
D : draaiingen
S : (lijn-)spiegelingen
$\vec{S}_v$: schuifspiegelingen
I : identieke afbeelding

Een gegeven translatie T is volledig bepaald door een ....
Een gegeven draaiing D is volledig bepaald door een .... en een ....
Een gegeven spiegeling S is volledig bepaald door een ....
Een gegeven schuifspiegeling $\vec{S}_v$ is volledig bepaald door een ....
en een ....
De identieke afbeelding I is volledig bepaald door ....

We gaan nu uit van het onderdeel van de voor u liggende vlakversiering, genummerd A.

Door de congruentie α gaat I over in II: $\alpha(\text{I}) = \text{II}$.
Evenzo definiëren we de congruenties β, γ, δ, ε, zodat

$$\beta(\text{I}) = \text{III},\ \gamma(\text{I}) = \text{IV},\ \delta(\text{I}) = \text{V} \text{ en } \varepsilon(\text{I}) = \text{I}$$

Bepaal de volgende samenstellingen:

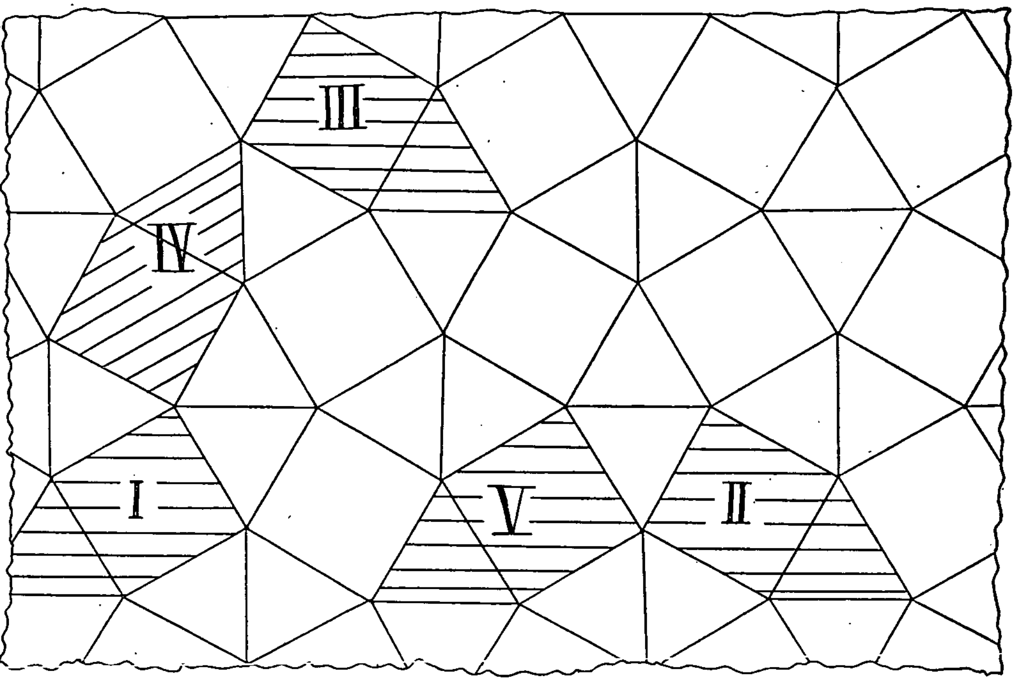
a) $\alpha \circ \beta(\text{I})$ kleur die rood
b) $\beta \circ \alpha(\text{I})$
c) $\alpha^2(\text{I})$ kleur die geel
d) $\beta^2(\text{I})$

Opm.:

Een congruentie is een bijectie van het vlak op zichzelf.

Vormen de hierboven beschreven bijecties $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ met de genoemde samenstelling een groep?

ja	nee



Kaart A.

OPDRACHT 2.

Materiaal: Kaart B

Kaart B is een deel van het platte vlak. We bestuderen die bewegingen, (congruenties), die het gegeven patroon in zichzelf overvoeren. (bijectie van het vlak op zichzelf met behoud van het patroon; men noemt dit een dekafbeelding (symmetrie) van het patroon).

Welke van de in opdracht 1 bestudeerde transformaties komen in aanmerking?

	ja	nee
translatie		
spiegeling		
draaiing		
schuifspiegeling		
identiteit		

Hoeveel verschillende translaties zijn mogelijk? | .... |

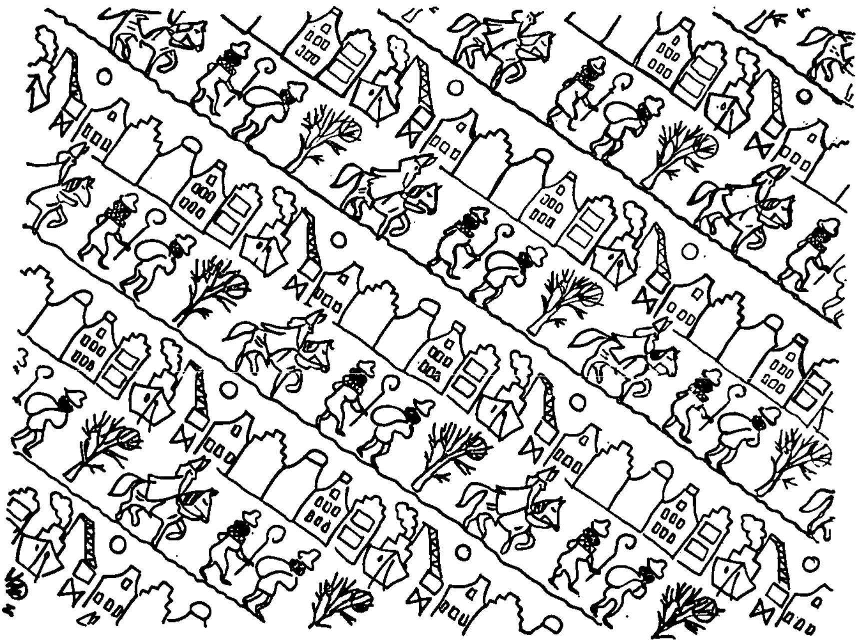
Van welke van deze translaties is de schuifvector minimaal? Teken deze vector. (Neem het maantje als uitgangspunt.)

Onder ,,fundamentaalgebied" verstaat men dat gedeelte van het vlak dat slechts met behulp van translaties, het gehele patroon voortbrengt en waarvoor geldt dat er geen ,,kleiner" vlakdeel is, dat dit doet.

Bepaal (en teken) een fundamentaalgebied van dit patroon. Is het fundamentaalgebied, afgezien van de plaats in het vlak, eenduidig bepaald? | ja | nee |

Zo neen, bepaal (en teken) dan een tweede fundamentaalgebied van het voor u liggende patroon.

Indien we het voortbrengende fundamentaalgebied slechts in één richting zouden verschuiven (T_v^n; $n \in \mathbb{Z}$), dan ontstaat geen vlakversiering, maar een | .... |



Kaart B.

OPDRACHT 3. | Materiaal: Kaarten C t/m O. |

De figuur die men verkrijgt door het fundamentaalgebied slechts in één richting te verschuiven, noemen we een randornament. U heeft hier een verzameling randornamenten. (Zie materiaal)

Bepaal eerst van elke rand een fundamentaalgebied. Geef ze aan op de randen zelf. (Werk verdelen en controleren!)

We beschouwen nu dekafbeeldingen (congruenties) van een gegeven randornament.

Vormen die een groep?

ja	nee

Meer in het bijzonder bekijken we dekafbeeldingen van de rand L die ook nog het gegeven fundamentaalgebied op zichzelf afbeelden. Hiertoe moet men het fundamentaalgebied ,,gunstig'' kiezen. Neem rand L voor u.
(Is het fundamentaalgebied i.v.m. dit onderzoek ,,gunstig'' aangegeven?)
Welke 4 verschillende symmetrieën van het fundamentaal gebied kunt u aangeven?

1. . . . . 2. . . . . 3. . . . . 4. . . . .

(Noem ze I, H, V en D; 3 keer raden waarom . . . !
Laat aan de hand van een plaatje zien dat $H \circ V = D$

Maak een tabel en bewijs dat deze verzameling symmetrieën een groep vormt.

$\circ$	I	H	V	D
I				
H				
V				
D				

Is de groep commutatief?

ja	nee

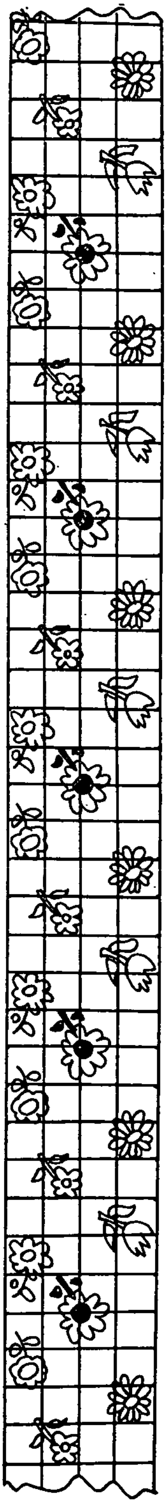
Met welk (klein) groep(je) is hij isomorf?

....

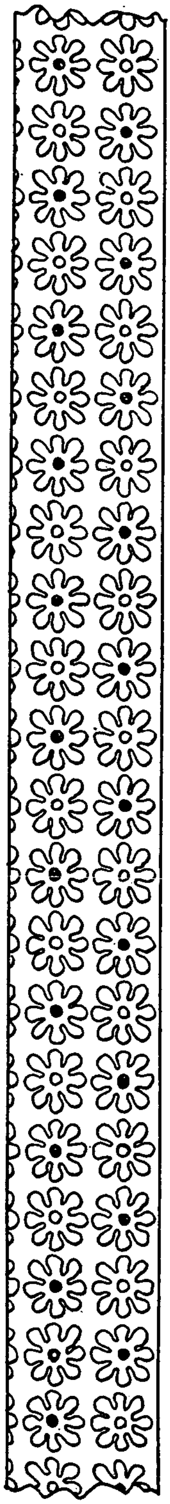
Ga na, dat wanneer (bijv.) V een dekafbeelding van de rand L is, die het fundamentaalgebied invariant laat, $T_v^n \circ V$ een willekeurige dekafbeelding van de rand is. Idem $T_v^n \circ D$ en $T_v^n \circ H$

De zojuist gevormde groep van dekafbeeldingen van het fundamentaalgebied: $\ulcorner\{I, H, V, D\}, \circ\urcorner$, gaat dan over in de groep dekafbeeldingen van de rand:

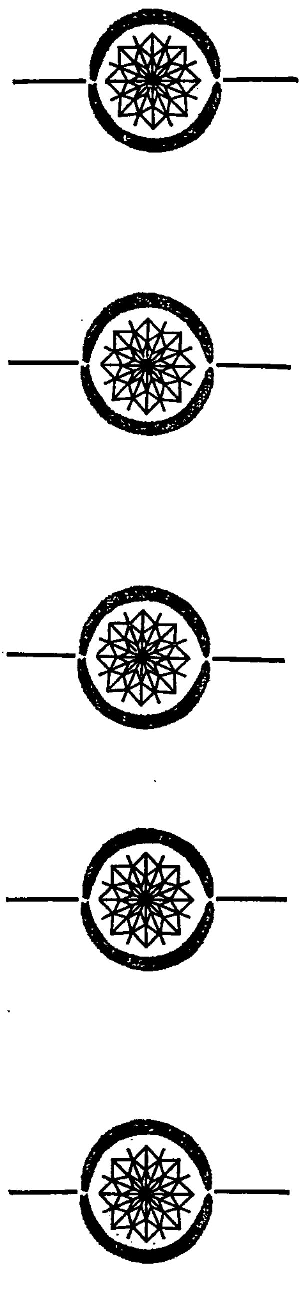
$\ulcorner\{-, -, -, -\}, \circ\urcorner$



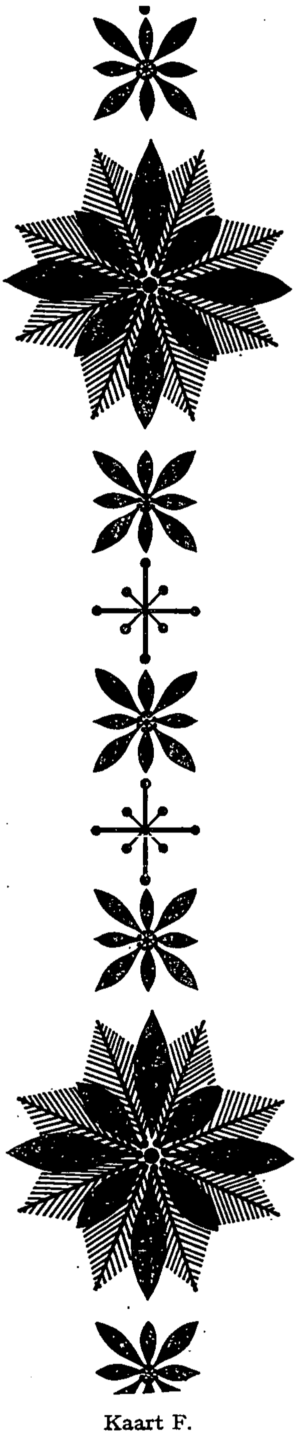
Kaart C.



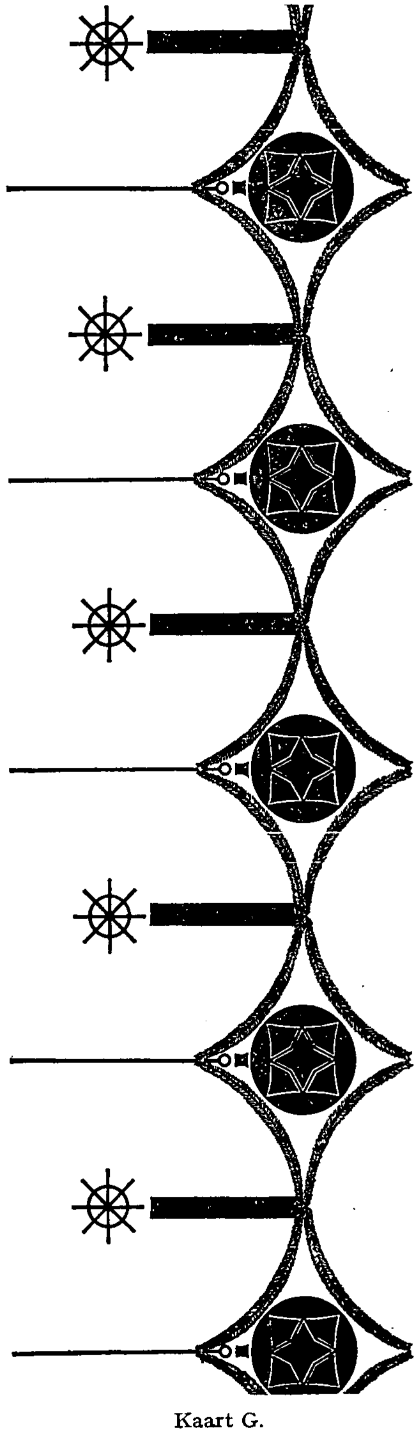
Kaart D.



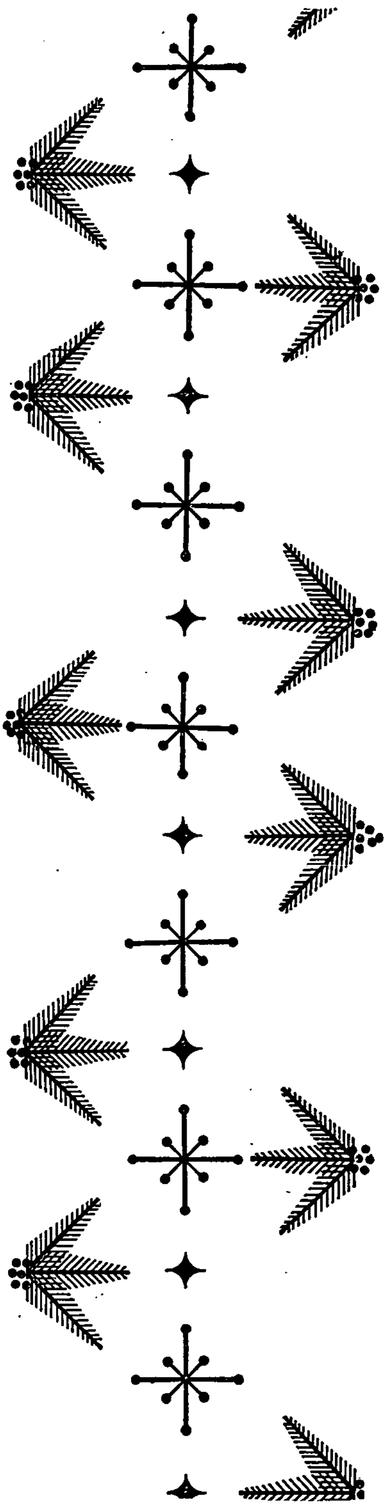
Kaart E.



Kaart F.



Kaart G.



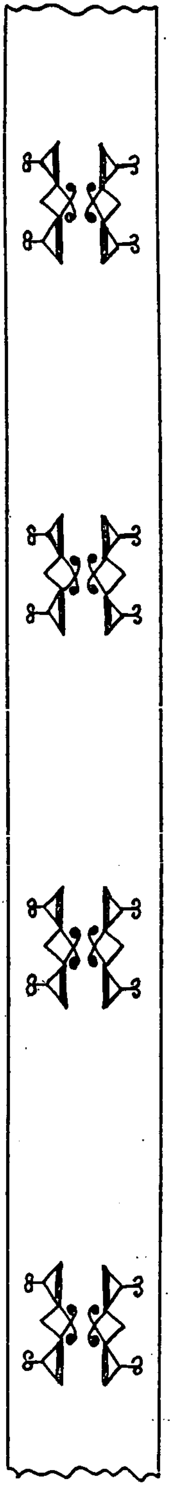
Kaart H.



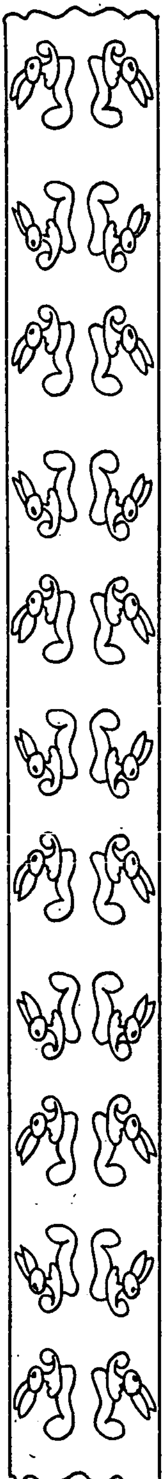
Kaart I.



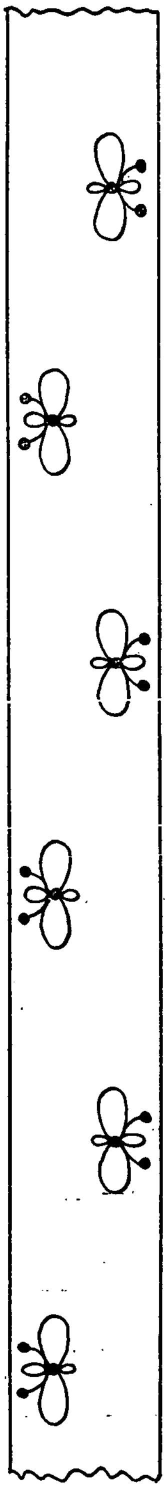
Kaart J.



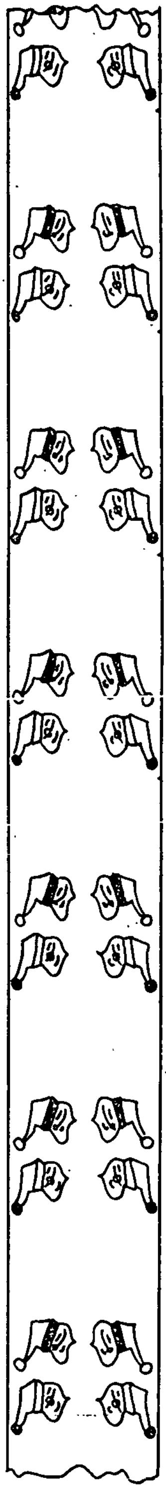
Kaart K.



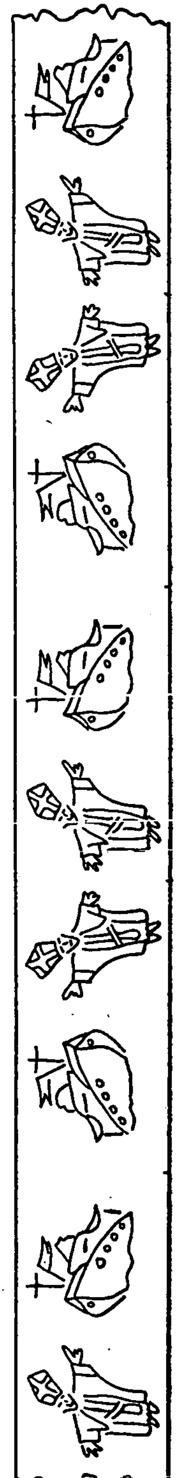
Kaart L.



Kaart M.



Kaart N.



Kaart O.

OPDRACHT 4.

Materiaal: Kaarten C t/m O

Bepaal ondergroepen van de groep $\ulcorner\{I, H, V, D\}, \circ\urcorner$

$\ulcorner\{I\}, \circ\urcorner$ I	$\ulcorner\{I, \ldots\}, \circ\urcorner$ II	$\ulcorner\{I, \ldots\}, \circ\urcorner$ III	$\ulcorner\{I, \ldots\}, \circ\urcorner$ IV

$\ulcorner\{I, H, V, D\}, \circ\urcorner$ V

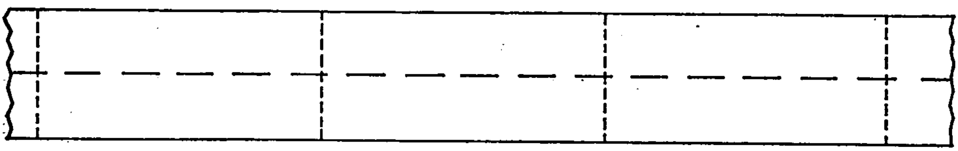
Zoek nu de bij elke ondergroep behorende rand(en) op.

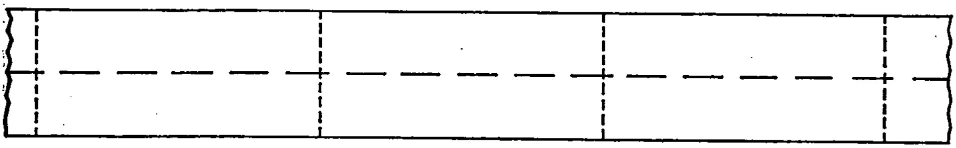
	L	C	D	E	F	G	H	I	J	K	M	N	O
I													
II													
III													
IV													
V													

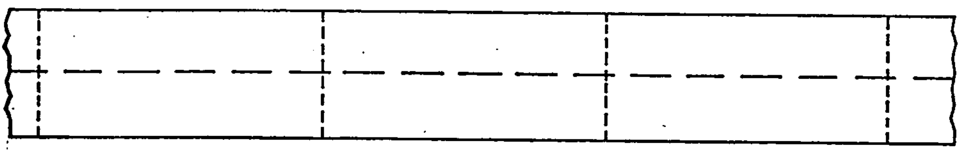
OPDRACHT 5.

We geven de 5 gevonden groepen van dekafbeeldingen van de rand (fundamentaalgebied) nog eens schematisch weer.

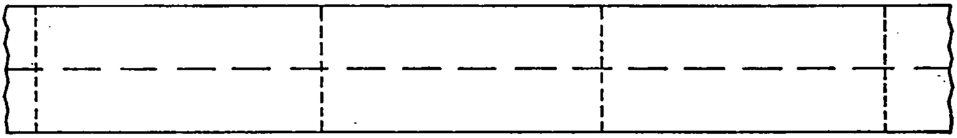
Teken in een fundamentaalgebied van de onderstaande randen een eenvoudig figuurtje dat precies de betrokken dekafbeelding toestaat en maak de bewuste randen af.

V


I


II


III 

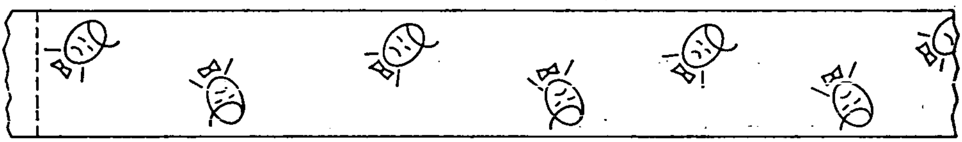
IV 

laat dit resultaat zien
bij de meester!!!

Welke congruentie kan wel een dekafbeelding van de gehele rand opleveren, maar beeldt het fundamentaalgebied niet op zichzelf af?

Deze congruentie speelt in het volgende onderzoek de hoofdrol:

OPDRACHT 6.



Teken een fundamentaalgebied in de figuur.

We zien hier een randornament dat naast de translaties $T_{\vec{v}}^{n}$ ($n \in \mathbf{Z}$) door één van de andere mogelijke congruenties op zichzelf wordt afgebeeld, nl. door een

| .... |

Ga na dat deze congruentie het fundamentaalgebied *niet* op zichzelf afbeeldt. (Dit in tegenstelling tot de dekafbeeldingen die we in de vorige 5 opdrachten ontmoetten.)

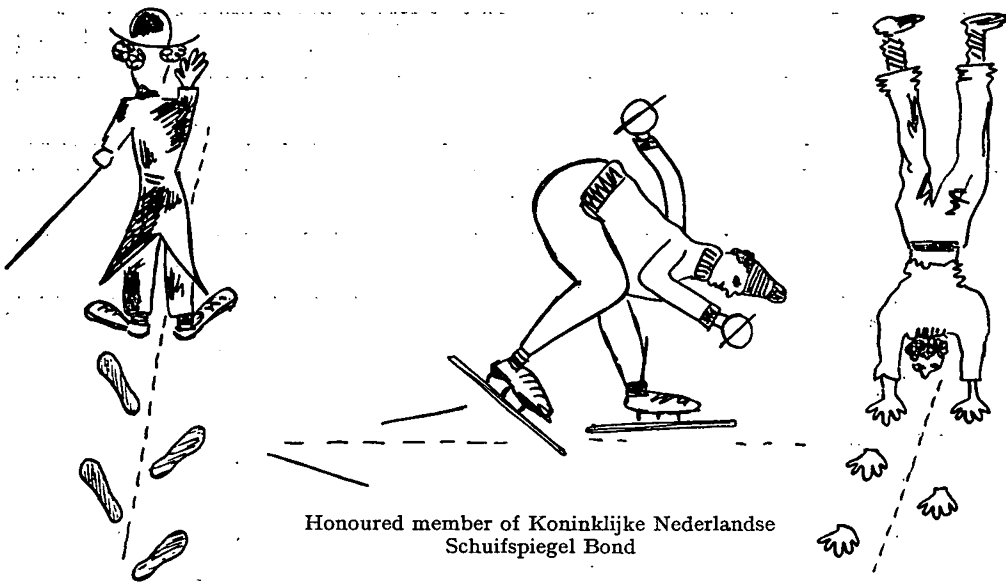
De schuifspiegeling die deze rand op zichzelf afbeeldt en tevens de „zuinigste" vector ($\overline{w}$) bevat, noemen we $\overrightarrow{S_w}$.

Is nu $\ulcorner\{T_{\vec{v}}^{n}, \overrightarrow{S_w}\}, \circ\urcorner$ een groep van dekafbeeldingen van de rand? | ja | nee |

Wat is dus het verband tussen $\overline{w}$ en $\overline{v}$?

(Beschouw $(\overrightarrow{S_w})^2 = \ldots$)

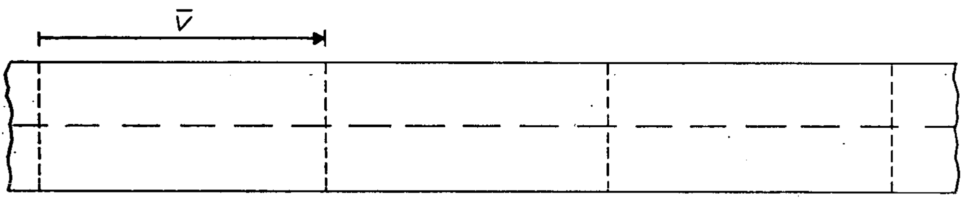
| $\overline{w} = \ldots \overline{v}$ |



Honoured member of Koninklijke Nederlandse
Schuifspiegel Bond

Ziet u verband met deze situaties? Formuleer dit.

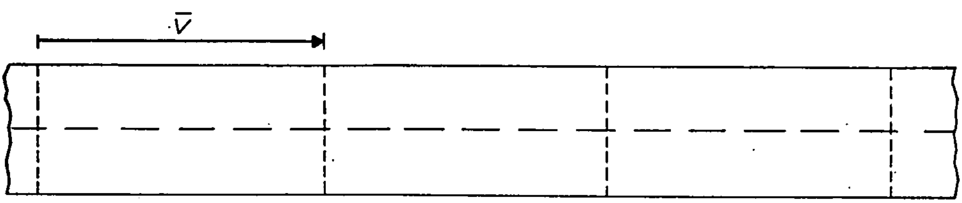
Maak nu zelf weer een schematische voorstelling van deze rand.



We vonden dus een zesde groep van randsymmetrieën, aan te geven met

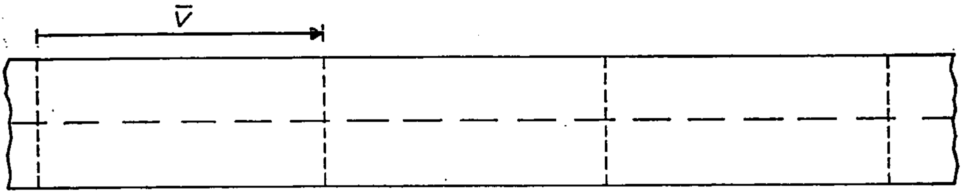
$$\ulcorner\{T_v^n, \vec{S}\ldots\}, o\urcorner$$

OPDRACHT 7.



We beginnen weer eenvoudig:
Teken volgens uw eigen ontwerp de groep $\ulcorner\{T_v^n\}, o\urcorner$
We bestuderen nu weer samenstellingen van randsymmetrieën, waaraan ook $\vec{S}_{\frac{1}{2}v}$ deelneemt.

Begin met $\ulcorner T_v^n, \vec{S}_{\frac{1}{2}v}, H\}, \circ\urcorner$
Teken het resultaat van alle samenstellingen ($n \leq 2$) in onderstaande rand.



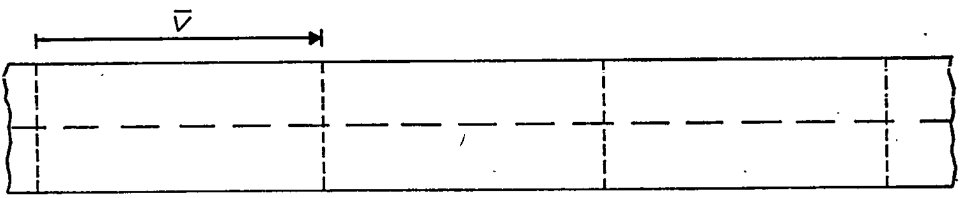
Ziet u dat u één van de reeds bestudeerde groepen van randsymmetrieën terug hebt gekregen?

Dit is de groep:

Conclusie: de samenstelling van $\vec{S}_{\frac{1}{2}v}$ met een horizontale spiegeling levert geen essentieel nieuwe groep van randsymmetrieën op.

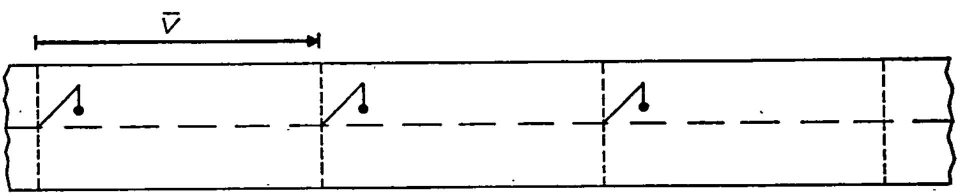
OPDRACHT 8.

We bestuderen nu de samenstelling van $\vec{S}_{\frac{1}{2}v}$ met V.
Tekent u eerst: (eigen schema)



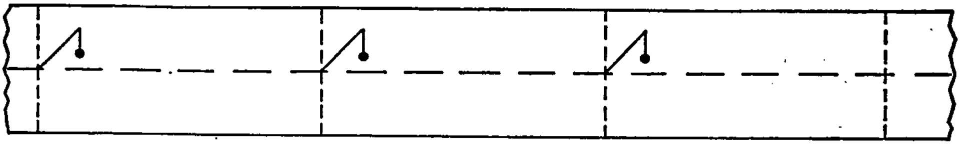
Is $\ulcorner\{T_v^n, \vec{S}_{\frac{1}{2}v}, V\}, \circ\urcorner$ een groep van randsymmetrieën?

Welke symmetrie ontbreekt?
Ziet u deze symmetrie in uw figuur? Hoe is deze bepaald?
Wij hebben ook een (luguber) schema voor het randornament bedacht. Gebruik dit in de volgende gevallen:

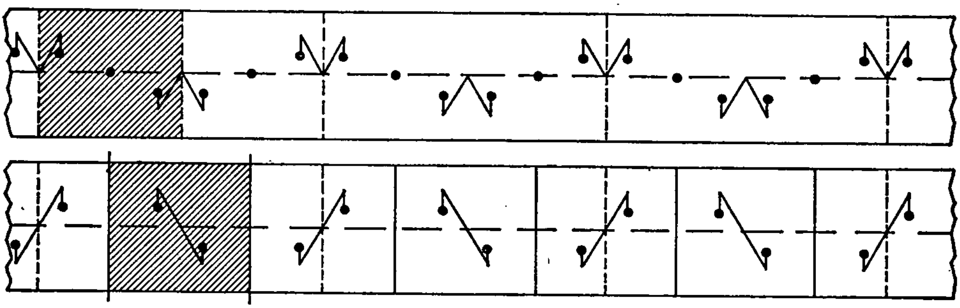


Teken het ornament indien u aan T_v^n nog $\vec{S}_{\frac{1}{2}v}$ en V toevoegt.

Geef de nu ontstane draaiingscentra *rood* aan.



Teken het ornament indien u aan T_v^n nog $\vec{S}_{\frac{1}{2}v}$ en D toevoegt.
Er ontstaan ook spiegelassen (vertikaal).
Nu geldt: $\ulcorner\{T_v^n, \vec{S}_{\frac{1}{2}v}, V, D\}, o\urcorner = \ulcorner\{T_v^n, \vec{S}_{\frac{1}{2}v}, D, V\}, o\urcorner$
Laat dit in onderstaande figuur zien door het fundamentaalgebied van de bovenste rand te verplaatsen.



Conclusie: we vonden een zevende groep van randsymmetrieën, aangegeven met:

$\ulcorner\{., ., ., .\}, o\urcorner$

OPDRACHT 9.

Maak alle zeven groepen van randsymmetrieën met het gegeven (ludieke) materiaal. Per rand 4 herhalingen.

4. *Hoe het praktikum verliep – enige op- en aanmerkingen*

Bij het samenstellen van dit praktikum bleek duidelijk het voordeel van een afgebakend stuk leerstof. Het feit, dat de vereiste voorkennis scherp te formuleren was, moet ook tot de verzameling positieve bijdragen worden gerekend. Deze voorkennis betreft de onderwerpen „bijectie van Π op Π", „congruenties in R^2", „groep".

Ondanks dit alles blijft het ontwerpen van een praktikum in zoverre een moeilijke zaak, dat men moet trachten afstand te doen van eigen voorkennis om het leerproces geheel opnieuw op te bouwen.

Dat o.a. dit laatste niet overal gelukt is, zal uit het vervolg blijken.

Het praktikum verliep vanaf het begin zeer geanimeerd; de deelnemers stelden zich direkt open voor de nieuwe werkvorm en bleken duidelijk geïnteresseerd en gemotiveerd door het geheel.

N.B. In de discussie, die na het praktikum werd gehouden, kwam onder meer het bezwaar naar voren dat men niet wist „waar het naar toe ging". We willen hierbij aantekenen dat dit praktikum slechts een momentopname was. Geïntegreerd in het geheel van het onderwijs dient er duidelijk een inleiding (betrekking hebbende op de leerstof) aan vooraf te gaan. En na het praktikum (soms tijdens) moeten de verworvenheden (bijv.) in een klassegesprek worden afgerond en vastgelegd.

Opdracht 1

De discussie kwam in iedere groep onmiddellijk op gang omdat deze opdracht enkele lastige vragen bleek te bevatten. Bijvoorbeeld: „de identieke afbeelding I is volledig bepaald door . . ."
Antwoorden hierop waren o.a.:

1) de definitie: ieder punt is invariant
2) drie dekpunten niet op een rechte
3) het origineel
4) de schuifvector $\vec{0}$

Moeilijkheden deden zich ook voor bij het aangeven van $\beta \circ \alpha$ en α^2 op de gegeven vlakversiering. (de juiste antwoorden vermelden we niet . . . !) De laatste vraag van deze opdracht leverde vrijwel evenveel antwoorden „ja" als „nee" op. (aan de lezer weer om de goede aan te wijzen!)

Al met al bleek dat deze als introductie bedoelde opdracht te veel tijd ging vergen. Na een kwartier werd dan ook gevraagd om over te gaan naar opdracht 2. (De praktikumleiders zagen overigens met genoegen dat sommige groepen desondanks, in verhoogd tempo, opdracht 1 geheel af maakten.)

Opdracht 2

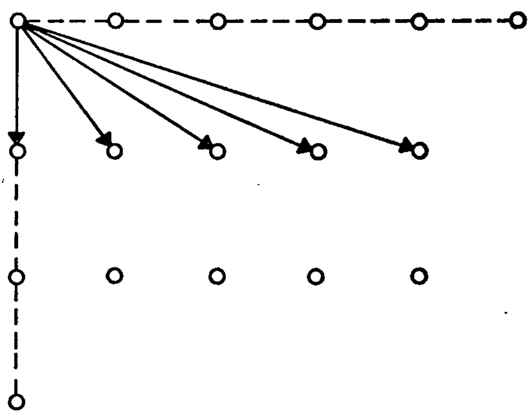
Deze opdracht leverde weinig problemen op.

Slechts bij de vraag
„Welke van de in opdracht 1 bestudeerde transformaties komen in aanmerking?",
deed zich de vraag voor of een „draaiing" over een hoek 0 ook als draaiing gold.

De aanwezigheid van de identiteit in het lijstje suggereerde echter anders.

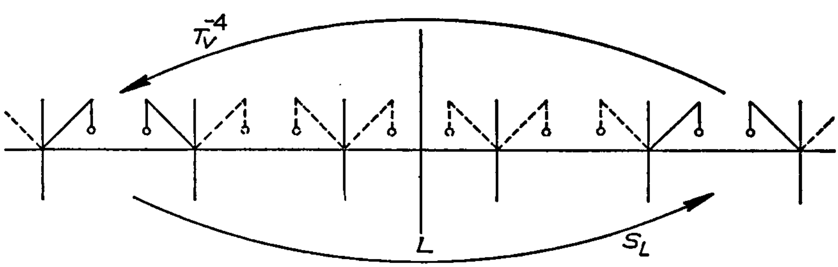
Bij de vraag naar het totaal aantal verschillende translaties hadden de samenstellers van het praktikum bewust de aard van de oneindigheid, als zijnde op dat moment minder relevant, buiten beschouwing gelaten. Toch werd door een van de groepen op de bewuste vraag het antwoord gegeven.

Het volgende plaatje van „roostermanen" licht dit toe: het aantal translaties is aftelbaar, omdat irrationale verhoudingen uitgesloten zijn.



Opdracht 3, 4 *en* 5

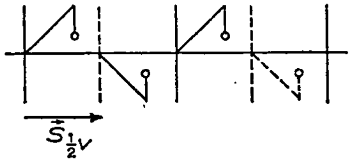
Het onderzoek werd hier toegespitst op symmetrieën van de rand die zijn terug te voeren tot symmetrieën van een goed gekozen fundamentaalgebied.



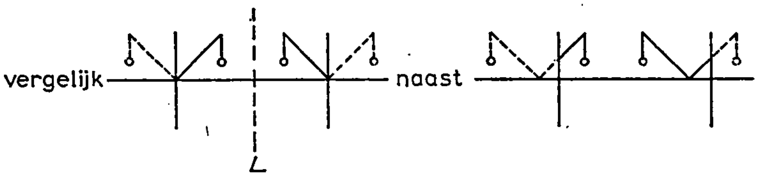
$T_v^{-4} \circ S_L$ beeldt het fundamentaalgebied op zichzelf af.

De opdrachten 3, 4 en 5 hielden zich bezig met de vijf van de zeven bestaande soorten randsymmetrieën die aan deze eis voldoen.

Randsymmetrieën die ook schuifspiegelingen bevatten hoeven niet te voldoen.

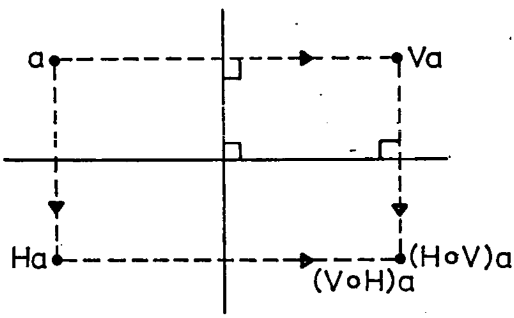


Alhoewel opdracht 3 geen problemen opleverde, ontstonden moeilijkheden in de opdrachten 4 en 5, door het niet duidelijk formuleren van het „goed gekozen" fundamentaalgebied – zie boven –.



N.B. De symmetriegroep waarvan in deze opdracht sprake is, is commutatief.

Hierachter verschuilt zich (een equivalent van) het parallellenaxioma van Euclides:
„Als van een vierhoek drie hoeken recht zijn, dan is ook de vierde hoek recht".



In opdracht 4 ontstonden de voormelde moeilijkheden bij het rubriceren van de diverse randen.

Dit temeer omdat enkele randen ook schuifspiegelingen toelieten.
In opdracht 5 kwam als antwoord op de laatste vraag steeds „translatie". De samenstellers van het praktikum hadden hier het antwoord „schuifspiegeling" in gedachten.

Daartoe was de vraag echter niet scherp genoeg geformuleerd.

Na opdracht 5 moest wegens tijdgebrek worden overgegaan naar de laatste opdracht (9).

Daartoe waren grote vellen papier beschikbaar gesteld waarop 7 randen waren afgebakend.

Met behulp van plakplaatjes moesten hierop de 5 randversieringen worden gereproduceerd.
(Het was een boeiend gezicht om te zien hoe in de diverse groepen met inzet van alle fantasie de fraaiste dierfiguurranden werden geproduceerd.)
Een enkele groep heeft nadien nog de opdracht 6 weten af te maken. Deze bleek geen moeilijkheden op te leveren.

5. *Slotconclusie*

Uit de wijze waarop in de diverse groepen gewerkt werd kon zeker de conclusie getrokken worden dat de bijeenkomst aan zijn doel beantwoordde wat betreft het „laten beleven" van deze didactische werkvorm.
Projecteren we de ervaringen in de school dan blijkt voor een leraar bij deze werkvorm een uiterst boeiende en ons inszien veel meer bevredigende rol te zijn weggelegd dan bij een doceerles.
In de eerste plaats is de spontane werksfeer een beleving apart.
De „leerlingen" zijn duidelijk sterk gemotiveerd en geïnteresseerd in het geheel.
De confrontatie met de zelfwerkzaamheid, het exploreren en zelf ontdekken, de inventiviteit en fantasie van leerlingen zal zeker een nieuw moment bepalen voor de leraar in zijn klas, die hij nadien niet meer zal willen missen.
Hij wordt door de leerlingen geraadpleegd in hun problemen, zal met een enkele suggestie een geheel nieuw terrein voor ze weten open te breken, terwijl hem aan de andere kant vragen zullen worden gesteld waarop hij zelf onmiddellijk geen antwoord weet, etc., etc.
Bovendien wordt de leraar veel directer geconfronteerd met het resultaat van zijn onderwijs.
(Sommigen vroegen zich overigens af of de tijd die de leerlingen in zo'n praktikum steken ten opzichte van de tijd die men voor een doceerles nodig heeft niet te lang is.
Uit ervaringen elders is echter gebleken dat de totaaltijd om een onderwerp te doceren zeker niet minder is dan de tijd benodigd voor een praktikum. Daarnaast is dan een van de grote voordelen dat bij latere controle blijkt dat de stof die in een praktikumles „is veroverd" veel beter beklijft dan wanneer men die verwerkt in een doceerles.)
Natuurlijk moet men uit het bovenstaande niet concluderen dat de doceerles nu verleden tijd is.
Integendeel, dit praktikum was slechts een momentopname uit een

lessituatie, die dient te worden ingeleid, begeleid en afgerond door een klassegesprek, of een van de vele andere lesvormen.

En bovendien, lang niet elk onderwerp leent zich tot verwerking in een praktikumvorm!

En dan is daar natuurlijk het geweldige probleem van het samenstellen van een dergelijk praktikum.

Dit vereist van de leraar een enorme voorbereiding, terwijl een gegeven praktikum veelal nadien nog herzien moet worden!

De ontwikkeling van een praktikum- annex materialenpakket zal men moeten zien als een proces van enkele jaren, waarbij gegevens uitgewisseld en gepubliceerd moeten worden.

(Ook hier zal teamwork wonderen kunnen verrichten!)

6. *Produktie; voorbeeld van een schema van een praktikumles voor mavo-leraren.*

Om de gespreksleiders in de gelegenheid te stellen een begin te maken met het samenstellen van een praktikum voor mavo-leraren, werden de volgende onderwerpen geannonceerd:

1) Viergroep van Klein
2) Open beweringen
3) Roostermeetkunde.

Van het eerste onderwerp geven we hieronder een schema, zoals dat na de bijeenkomst nog verder werd uitgewerkt.

1

We bestuderen verzamelingen met daarin een operatie. Definitie van die operatie [Structuur] → hoe is de samenhang van de elementen i.v.m. de operatie?
Tabel maken:

{0, 1, 2, 3} met gewone optelling
{−2, −1, 1, 2} met gewone vermenigvuldiging.

Ontdek: niet gesloten.

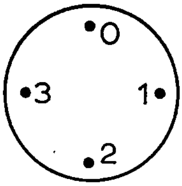
2

Op weg naar geslotenheid. We nemen N met de optelling:

+	0	1	2	3	...
0	0	1	2	3	...
1	1	2	3	4	...
2	2	3	4	5	...
3	3	4	5	6	...
⋮	...	...	...	...	...

Gesloten, maar oneindig.

3



De ,,vier-uren" klok. Elementen zijn 0, 1, 2, en 3. De operatie (even oppassen!) ,,optellen" ⊕

Tabel (gesloten systeem)

eindige verzameling.

4

Nog een eindige verzameling: dekafbeeldingen (alléén de draaiingen!) van het vierkant.

Elementen: ....

Operatie: ....

Tabel (notatie aangeven) gesloten systeem
eindige verzameling
structuur reeds ontmoet?

5

Symmetrieën van de rechthoek.
Meer zelfstandig onderzoek.
Notatie van de elementen.
Zelf laten ontwikkelen.

Tabel.

Gesloten?
Eindig?

Opmerkingen i.v.m. het voorgaande.

6

Voorbeeld (grotendeels zelfstandig laten uitzoeken)

$\{a,b\}, \{a\}, \{b\}, \phi.$

Operatie:

het symmetrisch verschil (△).

Tabel.

Welke opmerkingen kunt u maken?
Welke m.b.t. de structuur?

7

Zet de tabellen uit [3], [4], [5] en [6] nog eens naast elkaar. Ontdekken en definiëren van

1. neutraal element
2. invers element

8

Opmerking over associativiteit van de bestudeerde operaties.

Eventueel

vb. van operatie

$$a * b = \frac{a+b}{2},$$

die niet associatief is (in Q wel gesloten).

9

We resumeren

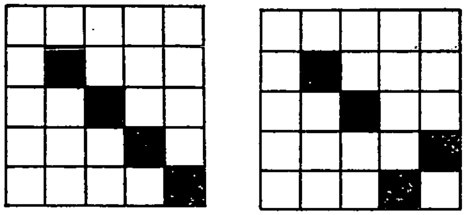
In systeem ⌜v, *⌝

vinden we

a)
b)
c)
d)

Groepsstructuur

10



Tabellen laten kleuren. Isomorfisme (intuïtief) laten vaststellen:

twee verschillende structuren.

11

We lichten de viergroep van Klein hieruit. Wat zijn karakteristieke eigenschappen?

ABSTRACTIE:

Maak tabel met de elementen e, a, b, c.

12

Groep van functies

F_1: $x \rightarrow x$
F_2: $x \rightarrow 1/x$
F_3: $x \rightarrow -x$
F_4: $x \rightarrow -1/x$

Operatie: samenstellen

Tabel.

Laat – met kleuren – zien dat dit V_4 is.

13

Als 12 voor de ondergroep van S_4:

(12)(34), (13)(24), (14)(23), (1)

Kleuren.

Heeft duidelijk met * te maken! Isomorfe structuren.

14

Zou er nog een derde mogelijkheid zijn voor groepen van de orde 4?

Aanwijzing: tabel.

Naast e is er nog een element dat zijn eigen inverse is, enz.

15

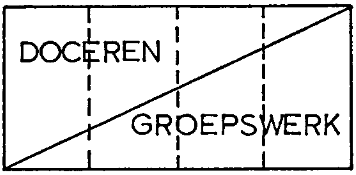
Conclusie:

Er zijn twee groepen van de orde 4. Voor V_4 geldt . . .

7. *Samenvatting van de discussies.*

We hopen dat deze dag heeft bijgedragen om enig inzicht te verkrijgen in de veranderingstendenzen van rol en taak van de leraar. Bij de verschillende *didactische werkvormen* die er zijn gaat het er niet om het doceren tot een minimum te beperken, maar om een middenweg te vinden tussen doceren en groepswerk. Op dit moment wordt er in de Nederlandse school nog teveel gedoceerd en te weinig aan groepswerk gedaan.

De situatie is schematisch weergegeven in onderstaande figuur: de stippellijn geheel links geeft aan: veel doceren, weinig groepswerk; is deze stippellijn in het midden geplaatst: half doceren, half groepswerk, terwijl als we de rechte geheel rechts plaatsen, dit betekent: weinig doceren, veel groepswerk.

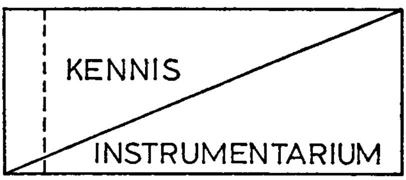


DIDACTISCHE WERKVORM

In de discussie kwam naar voren dat onze leerlingen niet aan deze werkvorm gewend zijn. Ons inziens is dit een reden te meer om een poging te doen in het onderwijs van nu de vertikaal een „rechtser" standpunt te laten innemen.

Op dezelfde wijze kunnen we de *leerdoelen* bekijken. Gaat het om kennis of om het verkrijgen van een instrumentarium om kennis „te lijf te gaan"? We kennen allen het verschijnsel van de „knowledge-explosure". De hoeveelheid kennis die de mensheid in 1700 bezat was in 1900 verdubbeld; in 1950 was zij verviervoudigd, in 1960 verachtvoudigd en zij zal nog voor 1970 verzestienvoudigd zijn. (Richard Miller, *Education in a changing society*, Heidelberg 1964)

In



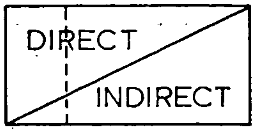
LEERDOELEN

moet de vertikale lijn duidelijk meer naar rechts.

Dit betekent dat problemen als „met de stof al of niet klaarkomen" een heel andere dimensie krijgen.

▶ De rol van de leraar zal sterk gaan veranderen. Zijn leidinggevende en richtingbepalende taak, zal dienen over te gaan in een meer begeleidende en richtingvragende taak.

In nevenstaand figuur

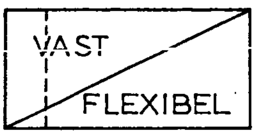


LEIDING

gaat de rechte dus wederom naar rechts.

▶ De leraar zal in de toekomst ook meer op de hoogte dienen te zijn van groepsprocessen. Hij zal moeten weten wat hij met groepen kan doen. Van vaste groepen, zoals we die nu kennen, zal overgegaan dienen te worden tot een meer flexibele groepering. Maar dan is het noodzakelijk dat de leraar weet wat het effect is van deze of gene indeling. Wat ons bijvoorbeeld voorkomt als verschil in tempo is misschien in werkelijkheid een kwestie van primair of secundair reageren.

In de figuur

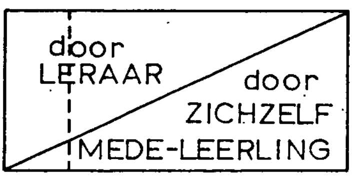


GROEPERING

gaat de rechte weer naar rechts.

▶ Zoals u vandaag heeft kunnen ervaren bent u soms op het rechte spoor gezet door uw „mede-leerling". Ook bij de *evaluatie,* bij het controleren en het corrigeren zien we de tendens dat de leerling komt tot een zelf-evaluatie of dat de „feed-back" wordt gegeven door de mede-leerlingen.

In de figuur



EVALUATIE

betekent dit weer een verschuiving naar rechts.

▶ In het wiskundeonderwijs op de mulo-scholen beperkte men zich veelal tot het aanleren van technieken en het maken van daarop passende „sommen". In het lespatroon kwamen slechts voor: overhoren – uitleggen – sommetjes vóórmaken – huiswerk opgeven.

Hoewel het beheersen van bepaalde technieken in de wiskunde zeker noodzakelijk is, moet hier niet het accent van het wiskunde-onderwijs liggen. Het verwerven van wiskundig inzicht moet bevorderd worden.

In



dient de rechte meer naar rechts verschoven te worden.

Bij al deze tekeningen gaat het niet om



maar om het vinden van het juiste evenwicht en de noodzakelijkheid om dit in het onderwijs van nu opnieuw vast te stellen.

Ten besluite willen we de verwachting uitspreken dat de bovengeschetste werkvorm in de nabije toekomst een normaal verschijnsel zal zijn in ons gehele onderwijs.

We hopen dat „Euclides" in deze ontwikkeling zijn bijdrage zal kunnen leveren!

VAN DE REDACTIE

In het vorige nummer berichten wij dat we nog geen namen van redactieleden uit de mavosector konden noemen. Thans verheugt het ons u te kunnen melden dat we als redactielid kunnen begroeten de heer Ch. Krijnen uit Oosterhout. Wij heten hem van harte welkom. Bovendien heeft de heer L. A. G. M. Muskens uit Schijndel toegezegd dat hij de andere plaats wil innemen. Dit echter met ingang van een nog niet vastgestelde datum.

KORREL CIL

Wat is een cirkelbundel?

Het is mij bij de behandeling van de cirkelbundels in de analytische meetkunde opgevallen, dat er tussen enkele leerboeken voor het v.h. en m.o. geen eenstemmigheid bestaat ten aanzien van het uitgangspunt bij dit onderwerp. De definities, die ik ontmoet in de leerboeken, dekken elkaar niet geheel; iets dat in de wiskunde – naar het mij voorkomt – een kritische opmerking rechtvaardigt.

Laten we uitgaan van de cirkels $C_1 = 0$ en $C_2 = 0$, symbolische notaties van $x^2 + y^2 - 4 = 0$ en $x^2 + y^2 - 6x = 0$. De machtlijn van deze cirkels is de lijn $3x - 2 = 0$, die wij symbolisch aangeven met $L = 0$.

Wat verstaan nu de verschillende auteurs onder de cirkelbundel, die $C_1 = 0$ en $C_2 = 0$ tot basisexemplaren heeft?

Lepoeter geeft in zijn „Gids voor de analytische meetkunde'' de volgende definitie: een cirkelbundel is het stelsel cirkels en de rechte lijn, die worden voorgesteld door de vergelijking $C_1 + kC_2 = 0$. In bovenstaand geval zou de verzameling krommen voorgesteld door $x^2 + y^2 - 4 + k(x^2 + y^2 - 6x) = 0$ een cirkelbundel zijn. De konsekwentie van deze definitie is duidelijk: de machtlijn behoort wél tot de bundel, een der basisexemplaren echter niet. Ook in Van Thijns Wiskundige Leergang treffen wij bovenstaande definitie aan.

Een heel ander geluid valt te beluisteren bij Van Dop en Van Haselen, alsmede bij Van Hiele. Deze schrijvers rekenen de machtlijn juist niet tot de bundel, de beide basisexemplaren echter wel. Hun definitie luidt namelijk: een cirkelbundel is de cirkelverzameling, die door $C_1 + kC_2 = 0$ met toevoeging van $C_2 = 0$ wordt voorgesteld.

Wijdenes (het was te verwachten) komt in zijn „Beknopte analytische meetkunde'' voor de dag met een door de planimetrische behandeling van het onderwerp geïnspireerde definitie. In de planimetrie verstaat men onder een cirkelbundel de verzameling cirkels, die met een gegeven cirkel een gegeven lijn tot machtlijn hebben. Dit leidt in de analytische meetkunde tot de formule $C + kL = 0$. Hiermee behoort Wijdenes tot de auteurs, die de machtlijn niet als bundelexemplaar accepteren, maar het voordeel van zijn definitie-

formule is, dat er geen uitzonderingsclausule behoeft te worden opgenomen of dat er iets moet worden toegevoegd.

Het is mij bekend dat er leraren zijn, die de machtlijn van een bundel als bundelexemplaar meetellen. Deze opvatting is wellicht didactisch aanvaardbaar, doch op wiskundige gronden verwerpelijk. En wel om de volgende redenen:

1) een rechte lijn voldoet niet aan de definitie van een cirkel.

2) elke cirkel gaat door de isotrope punten van het platte vlak $(1, \pm \mathrm{i}, 0)$, de machtlijn echter niet.

De geconstateerde moeilijkheid kan worden geanalyseerd, wanneer wij overgaan op homogene coördinaten. De eerdergenoemde cirkels hebben dan tot vergelijkingen:

$$x^2 + y^2 - 4z^2 = 0 \text{ en } x^2 + y^2 - 6xz = 0.$$

De vorm $C_1 + kC_2 = 0$ wordt:

$$x^2 + y^2 - 4z^2 + k(x^2 + y^2 - 6xz) = 0.$$

Het geval $k = -1$ geeft:

$$-4z^2 + 6xz = 0 \text{ oftewel } z(3x - 2z) = 0.$$

De ontaarding die ontstaat door voor k het getal -1 te substitueren, bestaat dus niet uit de machtlijn alleen, doch uit het lijnenpaar, dat wordt gevormd door de machtlijn en de rechte op oneindig. Als ontaarding zou men dit lijnenpaar kunnen meetellen bij de bundel. Wanneer men, zoals bij het v.h. en m.o. tot op heden gebruikelijk is, van homogene coördinaten geen gebruik maakt, is het niet juist de machtlijn als bundelexemplaar te hanteren.

Naast het reeds geconstateerde voordeel van de definitieformule, die Wijdenes geeft, is er nog een reden waarom ik zijn formule gebruik. De meetkunde van de onderbouw kan namelijk heel goed als uitgangspunt dienen bij de behandeling van het onderwerp. Voordat het onderwerp cirkelbundels in de analytische meetkunde aan de orde komt, is het goed de leerlingen de belangrijkste stellingen en definities over machten en de machtlijn van twee cirkels te laten repeteren.

De analytische behandeling zou dan kunnen beginnen met het bepalen van de machtlijn van de cirkels $x^2 + y^2 - 4 = 0$ en $x^2 + y^2 - 6x = 0$. Als de leerlingen vertrouwd zijn met de directe methode ter bepaling van verzamelingen, zal het niet veel moeite kosten de lijn $3x - 2 = 0$ te vinden. En ongetwijfeld zal men ontdekken, dat de vergelijking van de machtlijn eenvoudig gevonden wordt door de cirkelvergelijkingen van elkaar af te trekken.

We veranderen nu iets aan het probleem. Gegeven zijn de cirkel $x^2 + y^2 - 4 = 0$ en de lijn $3x - 2 = 0$. Kunnen we nu uit deze gegevens de andere cirkel ($x^2 + y^2 - 6x = 0$) terugvinden? U behoeft niet bang te zijn, dat er niemand op de gedachte komt deze vergelijkingen op te tellen. En daarmee zou het probleem opgelost zijn, ware het niet dat er zich een onverwachte moeilijkheid voordoet. Immers: de gegeven machtlijnvergelijking kan men straffeloos vervangen door $-9x + 6 = 0$, daar verandert de machtlijn niet door, het resultaat van de optelling echter wel!

Spelenderwijs komt op deze manier de vorm $C + kL = 0$ te voorschijn.

Bovenstaande schets maakt uiteraard geen enkele aanspraak op volledigheid. Maar het lijkt mij bijzonder nuttig juist de machtlijn van de bundel een belangrijke rol te laten spelen. Vooral bij het oplossen van vraagstukken kan men daar een enorm gemak van ondervinden.

In de gedaante $x^2 + y^2 - 4 + k(x^2 + y^2 - 6x) = 0$ zijn de coördinaten van het middelpunt en de lengte van de straal heel wat lastiger als functies van k te schrijven dan wanneer men de vorm $x^2 + y^2 - 4 + k(3x - 2) = 0$ gebruikt.

Amstelveen E. Buissant des Amorie

BOEKBESPREKING

J. Coreman, *Algebra voor de brugklas*, met werkschrift, W. E. J. Tjeenk Willink N.V., Zwolle, 1968, 112 blz., geb. *f* 6.—, werkschrift *f* 5.—.

De gehele methode zal bestaan uit 12 delen. Na dit eerste deel zullen nog 3 delen voor de MAVO, 3 voor de HAVO en 4 voor het VWO verschijnen. De vernieuwing gaat voor de ouders wel gepaard met extra financiële lasten.

Duidelijk wordt opnieuw dat het hoog tijd wordt dat men de symbolen uniformeert. In dit geval is de recensent in de war geraakt en hij vermoedt de auteur evenzeer.
N: de verzameling van de natuurlijke getallen.
P: die van de priemgetallen.
E: die van de even getallen.
Q: die van de oneven getallen. Is Q = **Q**? Ik zie geen verschil. Wel is op blz. 77 **Q** de verzameling van de rationale getallen. Maar wat moet ik nu met: Voor $a \in Q$ en $b \in Q$ geldt i.h.a. $a + b = b + a$, terwijl de operatie $a + b$ niet gesloten is in Q?
Z: de verzameling van de gehele getallen.
O: de verzameling van de positieve en negatieve gehele en gebroken getallen.
K: de verzameling van de kwadraten van de natuurlijke getallen.
De wazigste verzameling is die van de algebraïsche getallen (blz. 29). Uit het voorbeeld is het niet duidelijk of de verzameling alleen hele getallen bevat. 0 is in ieder geval uitgesloten. Maar op blz. 31 blijkt dat 0 en de gebroken getallen er ook toe behoren, misschien later ook nog irrationale?

Scherpe definities worden systematisch ontweken, op blz. 27 ontbreekt een definitie van deler zijn. Wat leest men nu?

Een even getal is deelbaar door 2, een oneven getal *is niet door 2 te delen*!

Een onhandige definitie van tegengestelde getallen (waarom niet: waarvan de som 0 is?) verhindert inzicht in het tegengestelde van een veelterm (blz. 30). Is het niet vreemd als men leest: *Alleen gelijksoortige eentermen kunnen worden opgeteld* (blz. 36)?

Dat een operatie gesloten resp. niet gesloten kan zijn op een verzameling ontbreekt. Toch zou dit keurig gepast hebben bij de behandeling van het oplossen van vergelijkingen. Maar ook in een goede behandeling zal men toch nooit kunnen zeggen dat:

$$a = 8 \text{ is de wortel van de vergelijking } 5 + a = 13!$$

en evenmin

$$3x = -15 \rightarrow x = \frac{-15}{3} = -5,$$

want wat we onder dit schema met *twee* =tekens moeten verstaan is mij niet duidelijk.

Samenvattend, er is haast geweest om tijdig op de markt te verschijnen. Een kritisch gebruik zal nog meerdere feilen aan het licht brengen, maar een herdruk kan veel goed maken.

Burgers

A. Kelfkens en D. Leujes, *Algebra voor de brugklas*, J. Noorduijn en Zoon N.V., 1968, 130 blz., prijs *f* 6.90.

Wat ik in dit boekje op prijs stel is, niet alleen de duidelijke samenvattingen van elke paragraaf met een lijst van de tekens en afkortingen, maar vooral dat niet vervallen is in een zinloze, althans in dit stadium, verzamelingsalgebra.

Ingevoerd worden de begrippen verzameling, deelverzameling en doorsnede, met de notaties, en deze worden consequent gebruikt.

De schrijvers stellen bij elke uitbreiding van het getalsysteem als eis, dat de commutatieve en associatieve (later ook de distributieve) wet moet gelden en hebben dan weinig moeilijkheden bij het vaststellen van de rekenregels.

De taal is aangepast aan die van 12 en 13-jarigen.

Burgers

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

214. Vijf personen staan in een kring. Ieder heeft een bedrag aan geld bij zich. Op een bepaald moment geeft ieder aan zijn linkerbuurman de helft van zijn bezit en tegelijkertijd aan zijn rechterbuurman de helft van zijn bezit. Daarna geeft op een gegeven moment weer ieder aan zijn linker- en aan zijn rechterbuurman de helft van wat hij dan bezit. Enzovoorts.

Wat zal er op de duur gebeuren? Is dit een cyclisch proces of nadert het tot een bepaalde eindtoestand?

We denken ons de geldsbedragen onbeperkt halveerbaar.

215. Een rechthoekig blok is opgebouwd uit congruente kubussen. Lengte, breedte en hoogte van het blok verhouden zich als 3 : 5 : 5. Een lichaamsdiagonaal gaat door 98 kubussen. Uit hoeveel kubussen bestaat het blok? (B. Kootstra)

OPLOSSINGEN

212. Ontwerp een magisch kwadraat van 16^2 getallen (1 tot en met 256). Dit kwadraat moet aan de eis voldoen, dat weer een magisch kwadraat ontstaat, als men de buitenste getallen weglaat. Dit kwadraat bestaat dan uit 14^2 getallen, maar niet meer uit de getallen 1 tot en met 196. Laat men weer de buitenste getallen weg, dan ontstaat opnieuw een magisch kwadraat, enz., totdat ten slotte een magisch kwadraat met 16 getallen overblijft.

Begin met een magisch kwadraat bestaande uit de getallen 121 tot en met 136 (waarvan het gemiddelde gelijk is aan de helft van 257). Dit kwadraat gaan we randen met de getallen 111 tot en met 120 en 137 tot en met 146. In het onderstaande schema zijn de getallen 111 tot en met 120 weergegeven door de getallen 1 tot en met 10 (die dus alle met 110 vermeerderd moeten worden). Deze getallen zijn zo gekozen, dat de sommen boven en beneden gelijk zijn (nl. 15) en de sommen links en rechts eveneens (nl. 19). Nu worden de lege vakken zo ingevuld, dat een magisch kwadraat ontstaat, dus links onder $257-116 = 241$, in de open vakken op de bovenste rij $257-111$, $257-115$, $257-119$, enz.

6				2	7
	136	123	122	133	4
	129	126	127	132	8
10	125	130	131	128	
3	124	135	134	121	
	1	5	9		

Volgens dit procédé gaan we door. Achterstaand diagram geeft weer, hoe dit kan geschieden.

213. De som van twee getallen is een 7-voud + 1, hun verschil een 7-voud + 2; het een is 1 minder dan 2 het ander; hun produkt heeft vier cijfers en eindigt op een 1. Welk gegeven is overbodig?

We lossen eerst de opgave op. Uit de eerste twee gegevens volgt:

$$x + y = 7k + 1 \quad \text{en} \quad x - y = 7l + 2.$$

Hieruit volgt

$$x = 7p + 5 \quad \text{en} \quad y = 7q + 3.$$

6									29	23	21	15	13	*1*	7
	6								23	21	15	13	*2*	7	*3*
		6							21	15	13	*1*	7	*4*	8
			6						15	13	*2*	7	*3*	8	14
				6					13	*1*	7	*4*	8	14	16
					6				*2*	7	*3*	8	14	16	22
										4	8	14	16	22	24
										8	14	16	22	24	30
28	26	20	18	12	10										
26	20	18	12	10	*3*										
20	18	12	10	*4*		*1*	5	9							
18	12	10	*3*		*2*	5	9	11							
12	10	*4*		*1*	5	9	11	17							
10	*3*		*2*	5	9	11	17	19							
4		*1*	5	9	11	17	19	25							
	2	5	9	11	17	19	25	27							

In combinatie met het derde gegeven volgt hieruit

$$x = 14q + 5 \quad \text{en} \quad y = 7q + 3.$$

Dus is

$$xy = 98q^2 + 77q + 15.$$

Omdat het produkt uit vier cijfers bestaat is

$$q = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8 \text{ of } 9.$$

Omdat het laatste cijfer van het produkt 1 is, is $q = 4$. De getallen zijn dus 61 en 31. En hierbij hebben we alle gegevens nodig gehad.

De aardigheid is nu, dat

$$x + y = 7k + 1 \quad \text{en} \quad x = 2y - 1$$

impliceert

$$3y - 1 = 7k + 1 \quad \text{en dus} \quad y = 7k_1 + 3,$$

waaruit volgt, dat $x - y = 7l + 2$. Dit gegeven was dus overbodig. (In plaats daarvan kan men ook laten zien, dat $x + y = 7k + 1$ afhankelijk van de andere gegevens is.)